**Genelleştirilmiş Burr X-Üstel Dağılımı için beş parametre tahmin yönteminin bir karşılaştırılması**

Genelleştirilmiş Burr X Üstel (GBXÜ) dağılımı Aldahlan ve ark. (2021) tarafından tanıtılan GBX-G ailesinin temel dağılım Üstel dağılım alınarak oluşturulan özel bir durumudur. GBXÜ dağılımı Aldahlan ve ark. (2021) tarafından önerilmiştir. Aldahlan ve ark. (2021) GBXÜ dağılımı için en çok olabilirlik tahmini üzerinde çalışmışlardır. Ancak literatürde bu yeni dağılımın parametrelerinin incelenmeyen tahmin edicileri ile ilgili bir karşılaştırma çalışması yoktur. Bu yüzden bu çalışmada GBXÜ dağılımının nokta tahmini için yeni bir açılım sunulmuştur. Bu çalışma GBXÜ dağılımı için en çok olabilirlik, en küçük kareler, ağırlıklandırılmış en küçük kareler, Anderson-Darling, Crámer–von-Mises yöntemi gibi beş farklı tahmin yöntemi sunmaktadır. Bu tahmin edicilerin performanslarını geniş bir Monte Carlo simülasyon çalışması ile karşılaştırdık. Simülasyon çalışmasında farklı örneklem büyüklüklerinde ve parametre ayarlarında 1000 tekrar yapılmıştır. GBXÜ dağılımı için incelenen tahmin edicilerin yan ve hata kareler ortalamasını (HKO) hesaplıyoruz. Simülasyon sonuçlarına göre, beklendiği gibi örneklem büyüklükleri arttığında yan ve HKO azalmaktadır. Böylece, tahmin edicilerin tahmin prosedürlerini sağladığı sonucuna varılabilir.

Anahtar Kelimeler: Genelleştirilmiş Burr X-Üstel dağılımı, En çok olabilirlik yöntemi, en küçük kareler yöntemi, ağırlıklandırılmış en küçük kareler yöntemi

**A Comparison of five estimation methods for Generalized Burr X-Exponential Distribution**

Generalized Burr X Exponential (GBXExp) distribution is a special case of GBX-G family introduced Aldahlan et al. (2021) with Exponential distribution as a baseline function. The GBXExp distribution is suggested by Aldahlan et al. (2021). Aldahlan et al. (2021) studied the maximum likelihood estimation for the GBXExp distribution. However, there is no comparison study regarding the unexamined estimators of the parameters of this new distribution in the literature. Therefore, in this study, a new expansion for point estimation of the GBXExp distribution is presented. This paper provides five different methods of estimation, such as maximum likelihood, least-squares, weighted least-squares, Anderson-Darling, and Crámer–von-Mises methods for GBXExp distribution. We compare the performances of these estimators via a extensive Monte Carlo simulation study. In the simulation study, 1000 repetitions have taken at different sample sizes and parameter settings. We compute average bias and mean square error (MSE) of the parameters of GBXExp distribution. According to the simulation results, the average bias and MSE decrease when the sample sizes increase as expected. Thus, it can be concluded that the estimators provide the procedures of the estimation.

Keywords: Generalized Burr X-Exponential distribution, Maximum likelihood method, Least-squares method, Weighted least-squares method.

# Giriş

Son dönemde birçok araştırmacının çeşitli yaşam zamanı dağılımları için parametre tahmin konusunu ele aldıkları görülmektedir. Parametre tahmin yöntemlerinden en çok bilineni ve kullanılanı en çok olabilirlik yöntemidir. Ancak son on yılda birçok yazar tarafından en çok olabilirlik yöntemine alternatif olarak birçok tahmin edici çalışılmıştır. Bu çalışmalardan bazıları şu şekilde sıralanabilir: Tanış ve Saraçoğlu (2019), Karakaya ve Tanış (2020a), Karakaya ve Tanış (2020b), Tanış ve ark. (2021), Tanış (2021), Tanış ve Karakaya (2021).

Bu çalışmada GBXÜ dağılımı için parametre tahmin yöntemlerinin karşılaştırılması ve GBXÜ dağılımının parametreleri için uygun tahmin yöntemlerini belirlemek amaçlanmıştır.

GBXÜ dağılımı, Aldahlan ve ark. (2021) tarafından önerilmiştir. GBXÜ dağılımı GBX-G dağılımlar ailesinin üstel dağılıma dayalı bir alt modelidir. GBX-G dağılımlar ailesi Yousof ve ark. (2017) tarafından tanıtılan Burr-X-G (BX-G) dağılımlar ailesinin genelleştirilmiş halidir. GBXÜ dağılımının dağılım ve olasılık yoğunluk fonksiyonları aşağıda sırası ile verilmiştir.

 (1)

 (2)

burada,  ve  şekil parametreleri,  ölçek parametresi ve .  alındığında GBXÜ dağılımı Burr-X-Üstel (BXÜ) dağılıma indirgenir. GBXÜ dağılımının hazard fonksiyonu artan, azalan ve küvet eğrisi şeklinde olabilmektedir (Aldahlan ve ark., 2021).

1. **GBXÜ Dağılımı İçin Parametre Tahmini**

Bu bölümde GBXÜ dağılımının parametrelerinin en çok olabilirlik (EÇO), en küçük kareler (EKK), ağırlıklandırılmış en küçük kareler (AEKK), Anderson-Darling (AD), Crámer–von-Mises (CvM) tahmin edicileri elde edilecektir.

, GBXÜ  dağılımından alınan rasgele bir örneklem olmak üzere log-olabilirlik fonksiyonu

 (3)

biçimindedir.  bir parametre vektörü olmak üzere ’nın EÇO aşağıdaki eşitlik ile elde edilebilir.

 (4)

Aşağıda tanımlanan dört fonksiyon dört farklı tahmin ediciyi elde etmek için kullanılacaktır.



ve



EKK, AEKK, CvM ve AD tahmin edicileri aşağıda sırası ile verilmiştir.

 (5)

 (6)

 (7)

 (8)

Eşitlik (4)-(8) verilen tahminler R programında optim fonksiyonu ve ilk kez Fletcher (1987) tarafından çalışılan BFGS algoritması kullanılarak elde edilebilir.

1. **Simülasyon Çalışması**

Bu bölümde GBXÜ dağılımının parametrelerinin EÇO, EKK, AEKK, CvM ve AD tahmin edicilerinin HKO ve yan değerlerine göre performanslarını karşılaştırmak için bir Monte Carlo simülasyon çalışması tasarlandı. Simülasyon çalışmasında 1000 tekrar alınmıştır. Simülasyon çalışmasındaki başlangıç değerleri aşağıda verilmiştir.

Durum 1:

Durum 2: 

Durum 3: 

Durum 4:

**Tablo 1.** Tüm tahmin edicilerin yan değerleri

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  | | | | |  | | | | |  | | | | |
| Durum |  | EÇO | EKK | AEKK | CvM | AD | EÇO | EKK | AEKK | CvM | AD | EÇO | EKK | AEKK | CvM | AD |
| 1 | 50 | 0.152 | -0.036 | -0.029 | -0.025 | -0.011 | 0.243 | 0.470 | 1.058 | 0.505 | 0.574 | 0.042 | 0.041 | 0.022 | 0.032 | 0.060 |
| 100 | 0.140 | -0.020 | -0.012 | -0.008 | -0.006 | 0.262 | 0.436 | 0.701 | 0.451 | 0.497 | 0.031 | 0.023 | 0.010 | 0.013 | 0.030 |
| 200 | 0.144 | -0.017 | -0.012 | -0.010 | -0.009 | 0.255 | 0.345 | 0.334 | 0.290 | 0.382 | 0.033 | 0.017 | 0.013 | 0.013 | 0.020 |
| 500 | 0.130 | -0.008 | -0.004 | -0.003 | -0.005 | 0.265 | 0.305 | 0.225 | 0.225 | 0.322 | 0.020 | 0.004 | 0.002 | 0.001 | 0.004 |
| 2 | 50 | 0.069 | -0.033 | -0.007 | 0.000 | 0.007 | 0.173 | 0.730 | 3.016 | 1.379 | 0.792 | 0.010 | 0.053 | -0.007 | 0.017 | 0.081 |
| 100 | 0.059 | -0.025 | 0.006 | 0.010 | -0.003 | 0.164 | 0.826 | 2.553 | 1.405 | 0.897 | 0.005 | 0.023 | -0.021 | -0.008 | 0.033 |
| 200 | 0.055 | -0.028 | 0.008 | 0.008 | -0.016 | 0.150 | 0.567 | 1.843 | 1.142 | 0.609 | 0.002 | 0.020 | -0.021 | -0.014 | 0.024 |
| 500 | 0.068 | -0.019 | -0.003 | -0.002 | -0.013 | 0.096 | 0.560 | 0.837 | 0.718 | 0.579 | 0.013 | 0.003 | -0.009 | -0.009 | 0.004 |
| 3 | 50 | -0.069 | -0.042 | -0.022 | -0.009 | 0.016 | 0.013 | 0.667 | 5.015 | 1.983 | 0.733 | -0.010 | 0.078 | -0.023 | 0.021 | 0.119 |
| 100 | -0.069 | -0.035 | -0.002 | 0.002 | -0.006 | -0.042 | 0.933 | 4.321 | 2.108 | 0.965 | -0.006 | 0.054 | -0.029 | 0.001 | 0.072 |
| 200 | -0.040 | -0.056 | -0.018 | -0.018 | -0.040 | -0.130 | 0.739 | 3.027 | 1.615 | 0.793 | 0.017 | 0.040 | -0.022 | -0.004 | 0.046 |
| 500 | -0.039 | -0.035 | -0.007 | -0.006 | -0.028 | -0.210 | 0.519 | 1.437 | 1.077 | 0.532 | 0.032 | 0.023 | -0.014 | -0.010 | 0.025 |
| 4 | 50 | 0.069 | -0.040 | -0.036 | -0.033 | -0.022 | 0.135 | 0.501 | 0.937 | 0.292 | 0.637 | 0.030 | 0.016 | -0.003 | 0.005 | 0.040 |
| 100 | 0.076 | -0.028 | -0.025 | -0.021 | -0.018 | 0.139 | 0.380 | 0.418 | 0.222 | 0.457 | 0.045 | 0.024 | 0.014 | 0.014 | 0.034 |
| 200 | 0.076 | -0.019 | -0.019 | -0.016 | -0.013 | 0.151 | 0.307 | 0.089 | 0.065 | 0.353 | 0.047 | 0.021 | 0.021 | 0.020 | 0.024 |
| 500 | 0.075 | -0.015 | -0.017 | -0.015 | -0.013 | 0.157 | 0.093 | -0.045 | -0.038 | 0.110 | 0.044 | 0.024 | 0.029 | 0.027 | 0.025 |

**Tablo 2.** Tüm tahmin edicilerin HKO değerleri

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  | | | | |  | | | | |  | | | | |
| Durum |  | EÇO | EKK | AEKK | CvM | AD | EÇO | EKK | AEKK | CvM | AD | EÇO | EKK | AEKK | CvM | AD |
| 1 | 50 | 0.038 | 0.026 | 0.027 | 0.021 | 0.026 | 0.096 | 1.744 | 8.454 | 2.401 | 2.021 | 0.014 | 0.042 | 0.041 | 0.030 | 0.048 |
| 100 | 0.033 | 0.018 | 0.017 | 0.014 | 0.018 | 0.100 | 1.378 | 4.154 | 1.644 | 1.501 | 0.011 | 0.025 | 0.023 | 0.019 | 0.027 |
| 200 | 0.034 | 0.013 | 0.011 | 0.010 | 0.013 | 0.096 | 1.116 | 1.445 | 1.038 | 1.178 | 0.010 | 0.017 | 0.014 | 0.012 | 0.018 |
| 500 | 0.026 | 0.008 | 0.006 | 0.006 | 0.008 | 0.094 | 0.906 | 0.675 | 0.632 | 0.938 | 0.006 | 0.010 | 0.007 | 0.007 | 0.010 |
| 2 | 50 | 0.075 | 0.063 | 0.074 | 0.062 | 0.067 | 0.150 | 3.012 | 34.902 | 7.890 | 3.066 | 0.033 | 0.074 | 0.084 | 0.062 | 0.084 |
| 100 | 0.063 | 0.048 | 0.051 | 0.044 | 0.048 | 0.133 | 3.345 | 28.720 | 8.082 | 3.603 | 0.026 | 0.049 | 0.054 | 0.041 | 0.051 |
| 200 | 0.055 | 0.032 | 0.032 | 0.028 | 0.032 | 0.116 | 2.184 | 18.831 | 6.242 | 2.286 | 0.023 | 0.032 | 0.036 | 0.030 | 0.033 |
| 500 | 0.043 | 0.022 | 0.019 | 0.018 | 0.022 | 0.067 | 2.282 | 5.933 | 3.836 | 2.313 | 0.016 | 0.022 | 0.019 | 0.018 | 0.022 |
| 3 | 50 | 0.181 | 0.094 | 0.125 | 0.110 | 0.099 | 0.303 | 3.291 | 74.771 | 12.914 | 3.487 | 0.090 | 0.128 | 0.186 | 0.132 | 0.146 |
| 100 | 0.154 | 0.074 | 0.088 | 0.078 | 0.074 | 0.241 | 4.741 | 63.374 | 15.496 | 4.807 | 0.072 | 0.106 | 0.141 | 0.104 | 0.110 |
| 200 | 0.131 | 0.057 | 0.057 | 0.051 | 0.056 | 0.202 | 3.913 | 45.593 | 11.983 | 4.118 | 0.061 | 0.075 | 0.092 | 0.074 | 0.076 |
| 500 | 0.079 | 0.032 | 0.028 | 0.026 | 0.031 | 0.128 | 2.637 | 16.189 | 7.822 | 2.616 | 0.036 | 0.043 | 0.045 | 0.041 | 0.043 |
| 4 | 50 | 0.007 | 0.012 | 0.012 | 0.008 | 0.012 | 0.030 | 2.069 | 8.981 | 1.565 | 2.427 | 0.012 | 0.083 | 0.075 | 0.044 | 0.094 |
| 100 | 0.007 | 0.009 | 0.008 | 0.006 | 0.009 | 0.029 | 1.403 | 2.985 | 1.013 | 1.599 | 0.011 | 0.061 | 0.046 | 0.034 | 0.065 |
| 200 | 0.007 | 0.006 | 0.004 | 0.003 | 0.006 | 0.031 | 1.235 | 0.554 | 0.392 | 1.342 | 0.010 | 0.037 | 0.022 | 0.019 | 0.038 |
| 500 | 0.007 | 0.003 | 0.002 | 0.002 | 0.003 | 0.032 | 0.441 | 0.145 | 0.142 | 0.465 | 0.007 | 0.019 | 0.011 | 0.010 | 0.019 |

1. **Sonuçlar**

Bu çalışmada GBXÜ dağılımı için parametre tahmini konusu ele alınmıştır. GBXÜ dağılımının parametrelerine ilişkin EÇO, EKK,AEKK, CvM ve AD tahminleri elde edilmiştir. Bu tahmin edicilerin performanslarını değerlendirmek amacıyla geniş bir Monte Carlo simülasyon çalışması yapılmıştır. Simülasyon çalışması sonuçlarına göre tüm tahmin edicilerin yan değerleri örnek büyüklüğü arttıkça beklenildiği gibi azalmaktadır. Genel olarak  parametresinin HKO diğer parametrelere göre daha büyük ve AD tahmin edicisinin HKO diğer tahmin edicilere göre daha yüksek çıkmıştır.  parametresinin HKO değerleri incelendiğinde en düşük HKO’ya sahip iki tahmin edici AD ve CvM’dir.  ve parametreleri için EÇO tahmin edicisi en düşük HKO’ya sahiptir. Sonuç olarak GBXÜ dağılımının parametre tahmini için EÇO tahmin edicisine alternatif olarak AD ve CvM tahmin edicileri kullanılabilir.

**Kaynaklar**

Aldahlan, M. A., Khalil, M. G., Afify, A. Z. (2021). A new generalized family of distributions for lifetime data. *Journal of Modern Applied Statistical Methods*, *19*(1), doi: 10.22237/jmasm/1608553200.

Fletcher R. (1987). Practical methods of optimization. John and Sons, Chichester.

Karakaya, K., Tanış, C. (2020a). Different methods of estimation for the one parameter Akash distribution. *Cumhuriyet Science Journal*, *41*(4), 944-950.

Karakaya, K., Tanış, C. (2020b). Estimating the Parameters of Xgamma Weibull Distribution. *Adıyaman University Journal of Science*, *10*(2), 557-571.

Tanış, C. (2021) On Transmuted Power Function Distribution: Characterization, Risk Measures, and Estimation. Journal of New Theory, (34), 72-81.

Tanış, C., Karakaya, K. (2021) On Estimating Parameters Of Lindley-Geometric Distribution. *Eskişehir Technical University Journal of Science and Technology A-Applied Sciences and Engineering*, *22*(2), 160-167.

Tanış, C., Saracoglu, B. (2019). Comparisons of six different estimation methods for log-kumaraswamy distribution. *Thermal Science*, *23*(Suppl. 6), 1839-1847.

Tanış, C., Saraçoğlu, B., Kuş, C., Pekgör, A., Karakaya, K. (2021). Transmuted lower record type fréchet distribution with lifetime regression analysis based on type I-censored data. *Journal of Statistical Theory and Applications*, *20*(1), 86-96.

Yousof, H. M., Afify, A. Z., Hamedani, G. G., Aryal, G. (2017). The Burr X generator of distributions for lifetime data. *Journal of Statistical Theory and Applications, 16*(3), 288-305. doi: 10.2991/jsta.2017.16.3.2